Пример теста из Алгебре 1 (И смер)

1. (2) Шта је алгебарска операција? Дати пример једне бинарне операција која није комутативна и једне тринарне операције.
2. (4) Шта је инверз у групи G? Доказати да је јединствено одређен. Чему је једнако $(xy)^{-1}$ за $x, y \in G$? Доказати.
3. (3) Нека су H и K подгрупе групе G. Доказати да је $H \cap K$ такође подгрупа групе G.
4. (2) Дефинисати ред елемента a у групи G. Ако је ред елемента a коначан и једнак реду групе G, шта можемо рећи о групи G?
5. (2) Написати дефиницију изоморфних група. Навести пример.
6. (3) Дефинисати цикл у групи $\mathbb{S}_n$. Може ли производ два цикла бити цикл? Може ли производ два цикла дужине 3 бити цикл дужине 8?
7. (2) Навести Кејлијеву теорему.
8. (3) Нека је H подгрупа групе G и $x, y \in G$. Дати потребан и довољан услов да важи $xH = yH$. У случају да је $G = \mathbb{S}_5$ и $H = \langle(1\,3\,5)\rangle$ дати пример различитих елемената $x, y, z \in \mathbb{S}_5 \setminus \{(1)\}$ таквих да је $xH = yH$ и $xH \neq zH$.
9. (2) Дефинисати Ојлерову функцију φ. Чему је једнако $\varphi(20 \cdot 35)$?
10. (2) Дефинисати класе конјугације у групи. Ако је група комутативна, шта можемо рећи о класама конјугације? Доказати.
11. (2) Нека је H нормална подгрупа групе G. Дефинисати операцију у количничкој групи G/H. Ако је $G = \mathbb{D}_6$ и $H = \langle\rho^3\rangle$, дати пример два елемента различита од неутрала у G/H и записати њихов производ.
12. (2) Дефинисати орбиту и стабилизатор при дејству групе на непразном скупу.
13. (2) Навести теорему о нормалној форми коначно генерисаних Абелових група. Ако је p прост број, одредити све (до на изоморфизам) различите Абелове групе реда p^2.
14. (3) Нека је $f : A \to B$ хомоморфизам комутативних прстена са јединицом. Доказати да је $\mathrm{Ker}(f) \lhd A$.
15. (2) Нека је A комутативан прстен са јединицом. Дефинисати $U(A)$. Одредити $U(\mathbb{Z}_{10})$.
16. (2) Навести Теорему о изоморфизму за комутативне прстене са јединицом.
17. (2) Нека је поље E раширење поља F. Када је елемент $\alpha \in E$ алгебарски над F? Ако α јесте алгебарски над F, чему је једнако $F[\alpha]$?